Was ist Nichtstandard-Analysis?

O.Univ.-Prof.Dr. J. Hejtmanek

Die reellen Zahlen, bezeichnet mit dem Buchstaben $\mathbb{R}$, sind die Grundlage der mathematischen Analysis. Sie sind wie ein geschliffener Edelstein, der, von verschiedenen Seiten betrachtet, verschiedene Facetten hat:
1.) Die reellen Zahlen sind alle Dezimalbrüche, ob sie nun abbrechen oder nicht abbrechen, z.B. $\frac{1}{4} = 0.25$ oder $\sqrt{2} = 1.4142 \ldots$. Mit diesen Dezimalbrüchen kann man, zunächst intuitiv, rechnen (Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division), und man kann sie der Größe nach anordnen.

2.) Die reellen Zahlen sind, axiomatisch gesehen, ein "vollständiger, Archimedisch-geordneter Körper". Beachten Sie, daß "vollständig" zweierlei Bedeutungen hat: Entweder "vollständig, der Ordnung nach", dh. jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum, oder "vollständig, der Norm nach", dh. jede Cauchy Folge ist eine konvergente Folge! Bei den reellen Zahlen fallen beide Vollständigkeitsbegriffe zusammen. "Archimedisch-geordnet" bedeutet für das handwerkliche Rechnen den folgenden Schluß: Wenn $|a| < \frac{1}{n}$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a = 0$.

3.) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann man aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ "konstruieren": $\mathbb{Q}$ ist ein Archimedisch-geordneter Körper, der allerdings nicht vollständig ist. So hat die Teilmenge der positiven rationalen Zahlen, deren Quadrate kleiner als 2 sind, kein Supremum in $\mathbb{Q}$. (Das Supremum wäre $\sqrt{2}$, welche Zahl aber nicht in $\mathbb{Q}$ ist). Wir bilden dann die Menge aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{Q}$. Diese Menge bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, und daraus greifen wir die Teilmenge aller Cauchy-Folgen $C_{\mathbb{Q}}$ und die Teilmenge aller Nullfolgen $N_{\mathbb{Q}}$. Dann gilt:

$$N_{\mathbb{Q}} \subseteq C_{\mathbb{Q}} \subseteq \text{Teilmenge der beschränkten Folgen} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}.$$

Beispiele dazu: $(1,2,3,4,\ldots)$ ist eine unbeschränkte Folge, $(1,0,1,0,1,0,\ldots)$ ist eine beschränkte Folge,

(i) $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$, (ii) $(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!})_{n\in\mathbb{N}}$, (iii) $(1,1.4,1.41,1,414,\ldots)$

und (iv) $(2,1.5,1.42,1.415,\ldots)$ sind Beispiele für Cauchy-Folgen.

und (v) $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und (vi) $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ sind Beispiele für Nullfolgen.

In der Menge aller Folgen $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ führt man eine Äquivalenzrelation ein:

<u>Definition:</u> $(a_n) \approx (b_n) :\Longleftrightarrow (a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge,

dh. $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon]$

oder für alle $\varepsilon > 0$ ist die folgende Teilmenge von N:

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - b_n| < \varepsilon\}$$

das Komplement einer endlichen Teilmenge von $\mathbb{N}$. Man zeigt leicht, daß dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Die Schar F aller Teilmengen von IN, die sich als Komplemente von endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ darstellen lassen, hat die folgenden drei Eigenschaften:

1) $\emptyset \notin F$ und $\mathbb{N} \in F$,
2) wenn $A, B \in F$ sind, dann ist $A \cap B \in F$ und
3) wenn $A \in F$ und $B \supseteq A$, dann ist auch $B \in F$.

Eine Schar von Teilmengen, die diese drei Eigenschaften hat, nennt man Filter; insbesondere nennt man die Schar aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, die sich als Komplement von endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ darstellen lassen, das Frechet-Filter von $\mathbb{N}$ (Frechet ... 1878-1973). Für unsere Äquivalenzrelation gilt also:

$$(\forall\varepsilon>0)\ [\{n \in \mathbb{N} : |a_n - b_n| < \varepsilon\} \in F].$$

Diese Äquivalenzrelation $\approx$ führt auf eine Klasseneinteilung von $C_{\mathbb{Q}}$, bei der alle Nullfolgen genau eine Äquivalenzklasse bilden. Die Äquivalenzklasse der Folge (a_n) werde mit $\overline{(a_n)}$ oder mit $(a_n) + N_{\mathbb{Q}}$ bezeichnet. Wir bilden die Menge aller dieser Äquivalenzklassen (oder den Quotientenraum)

$$C_{\mathbb{Q}} / \approx \quad \text{oder} \quad C_{\mathbb{Q}}/N_{\mathbb{Q}}.$$

In dieser Mengen können wir in kanonischer Weise Addition, Multiplikation und Ordnung einführen, z.B. wird die Addition $\dot{+}$ folgendermaßen eingeführt:

$$\overline{(a_n)} \ \dot{+}\ \overline{(b_n)} := \overline{(a_n + b_n)}.$$

Dann gilt der folgende, für die Konstruktion der reellen Zahlen wichtige Satz

<u>Theorem:</u> $C_{\mathbb{Q}} / N_{\mathbb{Q}}$ ist (algebraisch und ordnungsmäßig) isomorph zu $\mathbb{R}$,

und $\mathbb{Q}$ ist in natürlicher Weise in $\mathbb{R}$ eingebettet, dh. $a \in \mathbb{Q} \rightarrow (a, a, a, \ldots.) \in \mathbb{R}$.

Wir fragen nun: Was geschieht, wenn wir $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ durch $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ersetzen? Die Antwort ist: $C_{\mathbb{R}}/N_{\mathbb{R}}$ ist ebenfalls isomorph zu $\mathbb{R}$, dh. wir erhalten wiederum die reellen Zahlen.

Wir fragen weiter: Was geschieht, wenn wir in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ unsere Äquivalenzrelation $\approx$ durch eine andere ersetzen, die so geschickt gewählt ist, daß sie eine feinere, aber nicht zu feine Klasseneinteilung ergibt? Dann werden voraussichtlich die Nullfolgen $N_{\mathbb{Q}}$ nicht mehr eine Äquivalenzklasse bilden, sondern in (viele) Äquivalenzklassen zerfallen, die wir dann die infinitesimalen Zahlen nennen wollen.

Definition einer Äquivalenzrelation in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$(a_n) \approx (b_n) :\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\}$ ist Element einer vorgegebenen Schar von Teilmengen von $\mathbb{N}$, die wir mit U bezeichnen und die ein "freies Ultrafilter" von $\mathbb{N}$ bilden.

Der Begriff des Ultrafilters und des freien Ultrafilters wird hier nicht behandelt. Es handelt sich dabei um technische Details, und der Leser wird auf die bezügliche Literatur verwiesen. Soviel sei gesagt, daß die Existenz freier Ultrafilter durch das Zornsche Lemma gewährleistet ist.

Definition der hyperreellen Zahlen oder Nichtstandard-Zahlen

$$^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx$$

Genauer müßte man für die Äquivalenzrelation $\approx_U$ schreiben, da sie von der Wahl des freien Ultrafilters abhängt. $^*\mathbb{R}$ wird Stern-$\mathbb{R}$ oder Asterisk-$\mathbb{R}$ gesprochen. In dieser Menge können wir in kanonischer Weise Addition, Multiplikation und Ordnung einführen, z.B. wird die Addition $^*+$ folgendermaßen eingeführt:

$$\overline{(a_n)} \;^*\!+ \overline{(b_n)} := \overline{(a_n+b_n)} \; .$$

Für diese Menge $^*\mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften, die meist leicht zu beweisen sind:

1.) $^*\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper.
2.) $\mathbb{R}$ kann man in natürlicher Weise in $^*\mathbb{R}$ einbetten, dh. $a \in \mathbb{R} \to \overline{(a,a,a,\dots)} \in {^*\mathbb{R}}$.

3.) Es gibt infinitesimale Zahlen, z.B. $\delta := \overline{(\frac{1}{n})}$ oder $\delta^2 := \overline{(\frac{1}{n^2})}$.

Das bedeutet, daß $\delta > 0$ ist und daß $\delta < \frac{1}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ ist. ${}^*\mathbb{R}$ ist also nicht Archimedisch-geordnet. Die Menge aller infinitesimalen Zahlen faßt man zur Monade von Null, $\mu(0)$, zusammen.
Wir sagen: zwei hyperreelle Zahlen $r,s \in {}^*\mathbb{R}$ sind "infinitesimal nahe" und wir schreiben $r \approx s$, wenn $r - s \in \mu(0)$ ist , z.B. ist

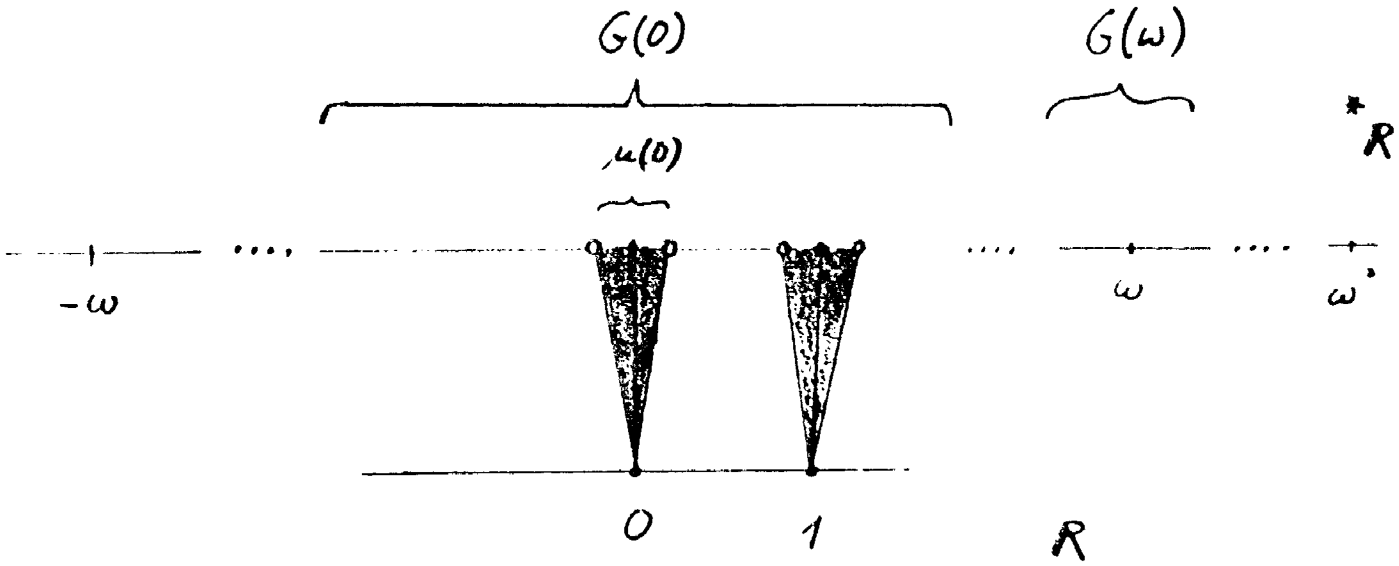
$$\overline{(\frac{1}{n})} \approx \overline{(\frac{1}{n^2})}.$$

Leibnitz hat mit solchen infinitesimalen Zahlen, z.B. dx oder dy, intuitiv gerechnet.

4.) Es gibt infinite Zahlen, z.B. $\omega := \overline{(n)}$ oder $\omega^2 := \overline{(n^2)}$.
Das bedeutet, daß $\omega > m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ ist.
Übrigens gilt

$$\omega = \frac{1}{\delta} .$$

Wir sagen: Zwei hyperreelle Zahlen, $r,s \in {}^*\mathbb{R}$ gehören zur selben Galaxie, wenn $r - s$ finit ist, dh. $|r - s| < m$, für ein $m \in \mathbb{N}$. Die folgende Zeichnung versucht einen Eindruck von der Einbettung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in die hyperrellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$ zu geben:



Jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ spannt sich zur Monade von r in der Galaxie von Null auf. Zwischen zwei Galaxien liegen unendlich viele andere Galxien. Da ihre Anzahl von der Wahl des Ultrafilters abhängt, und sie im allgemeinen nicht abzählbar sein wird, so mache ich zwischen zwei Galaxien 4 Punkte (3 Punkte stehen im allgemeinen für abzählbar). In $^*\mathbb{R}$ sind die hypernatürlichen Zahlen $^*\mathbb{N}$ ausgezeichnet:

$$1,2,3,4,\ldots.\ \omega-1,\ \omega,\ \omega+1,\ldots.\ \omega^2,\ldots.$$

Diese lassen sich zu den finiten hypernatürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und den infiniten hypernatürlichen Zahlen $^*\mathbb{N}_\infty$ zusammenfassen, sodaß

$$^*\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup {}^*\mathbb{N}_\infty \ .$$

Aus der Zeichnung sehen wir, daß die Einbettung von $\mathbb{R}$ in $^*\mathbb{R}$ in Richtung "hinauf" erfolgt: $r \in \mathbb{R} \rightarrow {}^*r = \overline{(r,r,r,\ldots)} \in G(0) \subseteq {}^*\mathbb{R}$. Die Richtung "hinunter" nennen wir Standardisierung; sie ordnet jeder hyperreellen Zahl $s \in G(0)$ den Standardteil $st(s) \in \mathbb{R}$ zu. Es gilt der folgende Satz

<u>Theorem</u>: $G(0)/\mu(0) = \mathbb{R}$

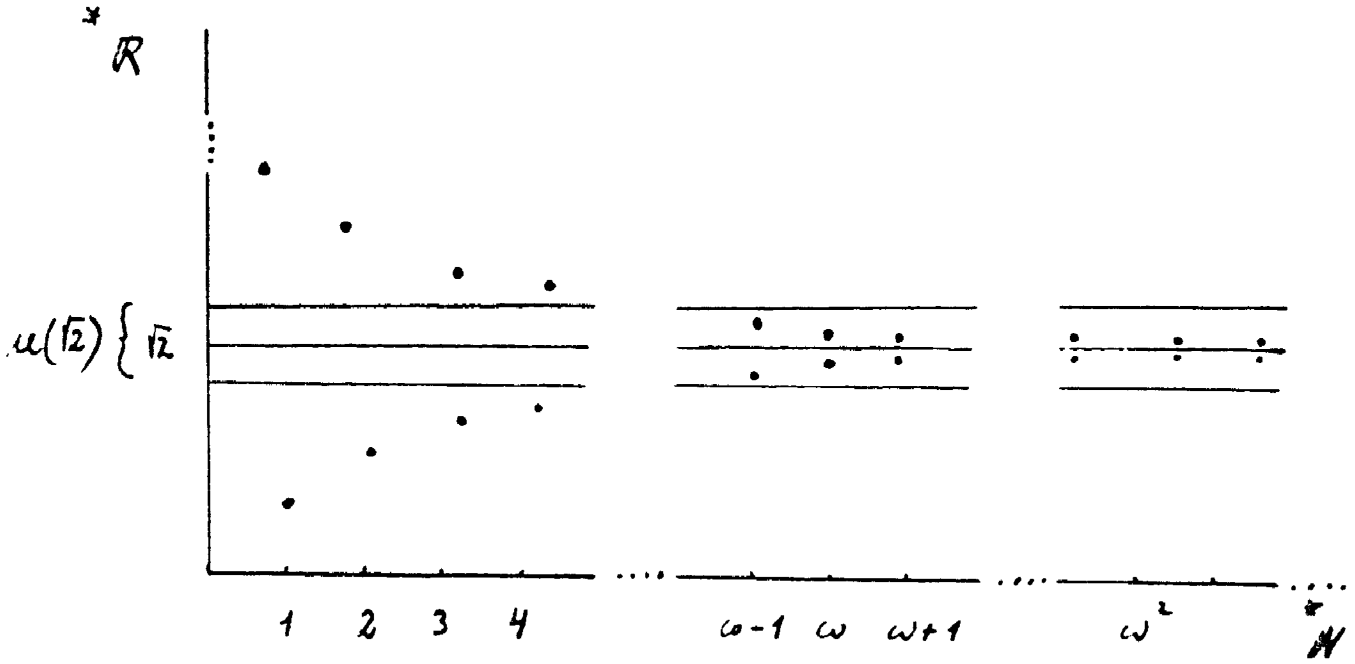
Im Folgenden werden einige Bemerkungen zum Begriff der Monade gemacht:

1) Bei Euklid, VII, wird Monade als Begriff, durch den jedes existierende Ding eins genannt wird, umschrieben.

2) In der griechischen Philosophie versteht man unter Monade den allgemeinen Begriff für alles, was einfach und unteilbar ist, z.B. bei Platon die Idee und bei Demokrit das Atom.

3) Leibniz versteht unter Monade in sich geschlossene und vollendete, letzte und beseelte Einheiten, die in ihrer Gesamtheit das geordnete System der Welt ausmachen.
Wir verstehen unter der "Monade von Null" alle infinitesimalen Zahlen. In der mathematischen Literatur wird statt Monade manchmal Halo (= Hof einer Lichtquelle) oder Schatten verwendet.

Die Einbettung von $\mathbb{R}$ in $^*\mathbb{R}$ bildet also jedes Individuum $r \in \mathbb{R}$ auf das Individuum $^*r \in {^*\mathbb{R}}$ ab. Diese *-Abbildung (gesprochen: Stern-Abbildung) kann man in natürlicher Weise auch auf Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf Folgen in $\mathbb{R}$ und auf Funktionen in $\mathbb{R}$ erweitern. Wir wollen hier auf technische Details nicht eingehen, und uns auf den Fall einer Folge in $\mathbb{R}$ beschränken. Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist bekanntlich eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion auf $\mathbb{N}$. Dann ist das *-Abbild dieser Folge eine $^*\mathbb{R}$-wertige Funktion auf $^*\mathbb{N}$, z.B. wird die Folge $[\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}]$, wobei $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ ist, zu $[\frac{1}{n};\ n \in {^*\mathbb{N}}]$, wobei jetzt $\frac{1}{n} \in {^*\mathbb{R}}$ ist. Wir wollen in der folgenden Zeichnung die beiden Folgen $(1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots)$ und $(2, 1.5, 1.42, 1.415, \ldots)$ darstellen, welche $\sqrt{2}$ von unten und von oben approximieren:



Wir bemerken, daß, für infinites $n \in {^*\mathbb{N}}$, die Glieder der Folge in der Monade von $\sqrt{2}$ zu liegen kommen.

Der Begriff der Konvergenz einer Folge, dh. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, hat eine Definition in der Standard-Welt, nämlich: zu jedem $\varepsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß $|a_n - a| < \varepsilon$, für alle $n \geq n_0$, ist. Dieser Standard-Begriff läßt sich nun in der Nichtstandard-Welt "charakterisieren":

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad {^*a_n} \approx a, \text{ für alle } n \in {^*\mathbb{N}_\infty}.$$

Wir erhalten auf diese Weise zwar nichts Neues, aber doch einen tieferen Einblick in den Begriff Konvergenz.

Man kann auch das *-Abbild einer reellwertigen Funktion $[f(x): x \in (a,b)]$ bilden, z.B. die Funktion $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, geht in die Funktion $x^2, x \in {}^*\mathbb{R}$, über. Diese ${}^*\mathbb{R}$-wertige Funktion, definiert auf ${}^*\mathbb{R}$, wird dann mit ${}^*f(x)$, $x \in {}^*\mathbb{R}$, bezeichnet. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\frac{{}^*f(x_0+dx) - f(x_0)}{dx}$$

der Differentialquotient an der Stelle x_0, wenn $0 \neq dx \in \mu(0)$ ist. In unserem Fall erhalten wir

$$\frac{(x_0+dx)^2 - x_0^2}{dx} = 2x_0 + dx$$

Wenn der Standardteil der rechten Seite existiert, und wenn er von der Wahl von $dx \in \mu(0)$ unabhängig ist, dann sagt man, daß die Funktion in x_0 eine Ableitung hat, und die Ableitung ist der Standardteil. Man sieht also, daß die Begriffe Differentialquotient und Ableitung auseinanderzuhalten sind.

Abschließend seien einige Bemerkungen zur Geschichte der Nichtstandard Analysis angefügt. Leibniz (1646-1716) hat mit infinitesimalen Zahlen, dx, dy, dx^2,... intuitiv gerechnet. Euler (1707-1783) hat mit ω eine unendlich große natürliche Zahl bezeichnet. Die Analysis des 19. Jahrhunderts ist durch die "Epsilontik" von Cauchy (1789-1857) und Weierstraß (1815-1897) bestimmend beeinflußt worden. Die Nichtstandard Analysis ist durch Robinson (ungefähr 1966) und Luxemburg(ungefähr 1973) begründet worden. Es sei hier ebenfalls die "Internal Set Theory" von Nelson erwähnt. An Lehrbüchern empfehle ich:

1) LAUGWITZ; Zahlen und Kontinuum, BI (1986),
2) HURD-LOEB; An Introduction to Nonstandard Real Analysis (1986), und
3) KEISLER; Foundations of Infinitesimal Calculus, 1976.

Das Wort "Standard" wurde zum ersten Mal von Robinson in dem Wort "nonstandard model" verwendet. Das englische Wort "standard" wird ins Deutsche mit "Standarte = Fahne" übertragen, hat aber auch die Bedeutung von Niveau.

Lassen Sie mich schließen mit einer allgemeinen Bemerkung nach Anderson :"Auf den Gebieten der Funktionalanalysis, Störungstheorie, Mathematischen Physik, Potentialtheorie, Mathematisch Ökonometrie und Wahrscheinlichkeitstheorie hat die Nichtstandard Analysis zu neuen Standard-Theorem geführt. Ein Metatheorem garantiert, daß jedes Standard-Theorem, das mit Nichtstandard-Methoden beweisbar ist, auch einen Standard-Beweis hat. Dies ist wichtig: Jeder Satz mit einem Nichtstandard-Beweis folgt aus den gewöhnlichen Axiomen der Analysis. Der dazugehörige Standard-Beweis kann aber viel komplizierter, viel länger und auch über die Maßen unintuitiv sein."